

Hipotezy wytężeńiowe

W materiałach izotropowych korzystamy z dwóch hipotez wytrzymałościowych:

Hipotezy Hubera-von Misesa-Hencky'ego

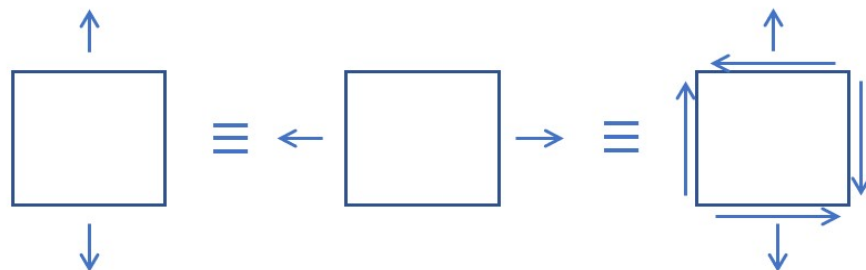
$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Hipotezy Treski (τ_{max})

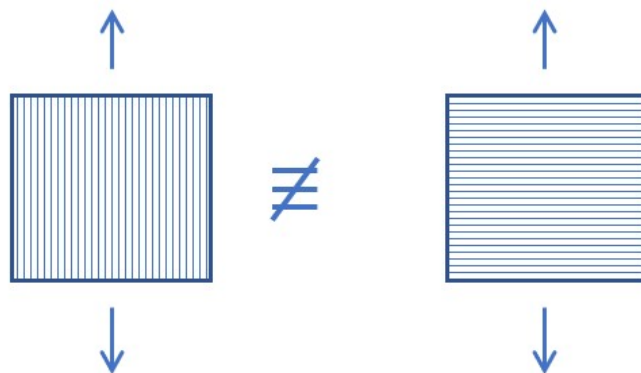
$$\sigma_{red} = 2\tau_{max}$$

Hipotezy te określają ilościowo stan naprężenia w danym punkcie materiału. Przyjmuje się, że jeśli naprężenie zostanie przekroczone, w danym punkcie następuje zniszczenie materiału.

Jeśli tylko σ_{red} jest takie samo:



Ze względu na to, że w materiale ortotropowym w różnych kierunkach mamy różną wytrzymałość, nie możemy w ich przypadku stosować hipotez wytrzymałościowych przeznaczonych dla materiałów izotropowych. W materiałach ortotropowych jednokierunkowe rozciąganie daną wartością obciążenia może dla pewnych kątów α prowadzić do zniszczenia, a dla innych nie, mimo, że hipotezy Hubera i Treski orzekłyby, że stan naprężenia jest taki sam dla każdego kąta α .



Dlatego też dla materiałów ortotropowych trzeba stosować odmienne kryteria wytrzymałościowe, które często są modyfikacjami kryteriów opracowanych dla materiałów izotropowych. Podstawowe hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów ortotropowych to:

- hipoteza maksymalnych naprężeń,
- hipoteza maksymalnych odkształceń,
- hipoteza Tsai-Wu,
- hipoteza Tsai-Hilla
- hipoteza Hoffmana

Hipotezy te mają charakter fenomenologiczny - starają się opisywać matematycznie, z jak najlepszą dokładnością stany naprężeń i odkształceń prowadzące do zniszczenia materiału ortotropowego, bez wnikania w mechanizmy zjawiska degradacji. Są kryteriami o charakterze makroskopowym (podobnie, jak np. hipoteza Hubera-Misesa dla materiałów izotropowych), zakładają ciągłość i jednorodność struktury i nie rozpatrują mikromechanizmów uszkodzeń. Przyjmują zazwyczaj, że wystarczającymi danymi eksperymentalnymi dla przewidywania wytrzymałości materiału w dowolnym stanie obciążenia są jego wytrzymałość dla ściskania i rozciągania w głównych kierunkach ortotropii ($i=1,2,3$) oraz dla ścinania w trzech płaszczyznach.

Hipoteza maksymalnych naprężeń

Zakłada, że warunkiem stanu bezpiecznego warstwy ortotropowej jest by składowe stanu naprężenia w układzie głównych osi ortotropii materiału były mniejsze od określonych doświadczalnie wartości. Graniczne wartości wyznaczone są zwykle odrębnie dla rozciągania i ściskania $X_{ci} \neq -X_{ti}$.

Dla trójwymiarowego stanu naprężenia stany bezpieczne określone są przez nierówności:

$$\begin{array}{lll} X_{c1} < \sigma_{11} < X_{t1} & X_{c2} < \sigma_{22} < X_{t2} & X_{c3} < \sigma_{33} < X_{t3} \\ |\tau_{12}| < S^w_{12} & |\tau_{23}| < S^w_{23} & |\tau_{13}| < S^w_{13} \end{array}$$

gdzie X_{ti} odpowiada wartościom granicznym przy rozciąganiu w kierunkach $i=1,2,3$; X_{ci} przy ściskaniu, a S^w_{ij} określają graniczne wartości przy ścinaniu w płaszczyznach ij . W przedstawianych dalej zależnościach przyjmujemy, że zgodnie z ogólną konwencją w teorii sprężystości X_{ci} są ujemne (ściskanie), a X_{ti} i S^w_{ij} – dodatnie.

Hipotezę można opisać jednym parametrem:

$$k = \max \left\{ \frac{\sigma_{11}}{X_{t1}} \text{ lub } \frac{\sigma_{11}}{X_{c1}}, \quad \frac{\sigma_{22}}{X_{t2}} \text{ lub } \frac{\sigma_{22}}{X_{c2}}, \quad \frac{\sigma_{33}}{X_{t3}} \text{ lub } \frac{\sigma_{33}}{X_{c3}}, \quad \frac{|\tau_{12}|}{S_{12}^w}, \quad \frac{|\tau_{23}|}{S_{23}^w}, \quad \frac{|\tau_{13}|}{S_{31}^w} \right\}$$

gdzie odpowiedni warunek dla naprężeń normalnych zależy od aktualnego znaku (rozciąganie lub ściskanie). Parametr k jest wskaźnikiem określającym stopień wyłączenia materiału. Dla stanu bez naprężeń mamy $k=0$, dla stanu na granicy zniszczenia $k=1$. Wynika stąd, że wskaźnik wyłączenia k jest odwrotnością współczynnika bezpieczeństwa.

W szczególnym przypadku warstwy ortotropowej (założenie płaskiego stanu naprężenia) mamy trzy warunki:

$$X_{c1} < \sigma_{11} < X_{t1} \quad X_{c2} < \sigma_{22} < X_{t2} \quad |\tau_{12}| < S$$

Gdzie X_{t1} i X_{t2} wyznacza się z prób rozciągania; X_{c1} i X_{c2} z prób ściskania a S określa wytrzymałość na ścinanie. Wartości X_{c1} i X_{c2} są ujemne a, X_{t1} i X_{t2} i S – dodatnie.

Jeśli mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, określonym w dowolnym przyjętym układzie xy , należy najpierw wyznaczyć składowe stanu naprężenia w układzie głównych osi ortotropii 1 i 2.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

W przypadku jednokierunkowego rozciągania warstwy otrzymamy:

$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha,$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{12} = -\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Stąd dopuszczalne wartości naprężenia σ_{xx} są określone przez związki:

$$\begin{aligned} \frac{X_{c1}}{\cos^2 \alpha} &< \sigma_{xx} < \frac{X_{t1}}{\cos^2 \alpha}, \\ \frac{X_{c2}}{\sin^2 \alpha} &< \sigma_{xx} < \frac{X_{t2}}{\sin^2 \alpha}, \\ |\sigma_{xx}| &< \frac{S^w}{|\cos \alpha \sin \alpha|} \end{aligned}$$

Hipoteza maksymalnych odkształceń

Jest podobna do hipotezy maksymalnych naprężeń, jednak podstawowe warunki narzucone są na odkształcenia w układzie głównych osi ortotropii.

Przyjmując, że znamy niszczące odkształcenia w układzie głównych osi ortotropii (ε_{ci} , ε_{ti} , γ_{ij}^* , $i=1,2,3$) mamy warunki:

$$\varepsilon_{c1} < \varepsilon_{11} < \varepsilon_{t1}, \quad \varepsilon_{c2} < \varepsilon_{22} < \varepsilon_{t2}, \quad \varepsilon_{c3} < \varepsilon_{33} < \varepsilon_{t3}$$
$$|\gamma_{12}| < \gamma_{12}^*, \quad |\gamma_{23}| < \gamma_{23}^*, \quad |\gamma_{31}| < \gamma_{31}^*$$

W tym przypadku wartości ε_{ci} , ε_{ti} , γ_{ij}^* oznaczają graniczne (niszczące) wartości dla poszczególnych składowych stanu odkształcenia z odróżnieniem ściskania i rozciągania.

Hipotezę maksymalnych odkształceń w tym sformułowaniu można opisać jednym parametrem:

$$k = \max \left\{ \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{t1}} \text{ lub } \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{c1}}, \quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{t2}} \text{ lub } \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{c2}}, \quad \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{t3}} \text{ lub } \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{c3}}, \quad \frac{|\gamma_{12}|}{\gamma_{12}^*}, \frac{|\gamma_{23}|}{\gamma_{23}^*}, \frac{|\gamma_{13}|}{\gamma_{13}^*} \right\}$$

gdzie odpowiedni warunek dla odkształceń wzdłużnych zależy od aktualnego znaku odkształcenia (rozciąganie lub ściskanie). Jak poprzednio k oznacza wskaźnik wyężenia ($k=1$ oznacza zniszczenie).

Dla warstwy ortotropowej (płaski stan naprężenia) mamy tylko trzy warunki:

$$\varepsilon_{c1} < \varepsilon_{11} < \varepsilon_{t2} \qquad \varepsilon_{c2} < \varepsilon_{22} < \varepsilon_{t2} \qquad |\gamma_{12}| < \gamma^*$$

Na przykład przy jednoosiowym rozciąganiu mamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_{11}} \left(\cos^2 \alpha - \nu_{12} \sin^2 \alpha \right) \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_{22}} \left(\sin^2 \alpha - \nu_{21} \cos^2 \alpha \right) \sigma_{xx}, \\ \gamma_{12} &= -\frac{1}{G_{12}} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{xx}. \end{aligned}$$

Graniczne wartości odkształceń bierzemy bezpośrednio z doświadczeń. Można je również wyznaczyć ze związków:

$$\varepsilon_{ci} = \frac{X_{ci}}{E_{ii}}, \quad \varepsilon_{ti} = \frac{X_{ti}}{E_{ii}}, \quad \gamma_0 = \frac{S}{G_{12}},$$

gdzie symbol E_{ii} oznacza wartość odpowiedniego modułu Younga. Dla jednokierunkowego rozciągania σ_{xx} warunki bezpiecznego stanu wyężenia:

$$\frac{X_{c1}}{\cos^2 \alpha - \nu_{12} \sin^2 \alpha} < \sigma_{xx} < \frac{X_{t1}}{\cos^2 \alpha - \nu_{12} \sin^2 \alpha},$$

$$\frac{X_{c2}}{\sin^2 \alpha - \nu_{21} \cos^2 \alpha} < \sigma_{xx} < \frac{X_{t2}}{\sin^2 \alpha - \nu_{21} \cos^2 \alpha},$$

$$|\sigma_{xx}| < \frac{S^w}{|\sin \alpha \cos \alpha|}.$$

Warunki te różnią się nieco od warunków wynikających z hipotezy maksymalnych naprężzeń.

Hipoteza Tsai–Wu

W kryteriach maksymalnych odkształceń i maksymalnych naprężeń poszczególne składowe stanu naprężenia i odkształcenia traktowane są jako niezależnie wpływające na wyężnienie materiału. Przyjmując, że ma znaczenie równoczesne występowanie poszczególnych składowych stanu naprężenia niektóre hipotezy przyjmują, że wyężnienie materiału jest wielomianową funkcją składowych stanu naprężenia. Kryterium wielomianowe wykorzystywane było w kilku hipotezach proponowanych dla materiałów ortotropowych. Dobrze sprawdzającym się kryterium tego typu jest kryterium Tsai-Wu (1971). Tsai i Wu zaproponowali kryterium dla warstwy ortotropowej:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_6\tau_{12} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1$$

W powyższym wzorze numeracja indeksów wynika z tzw. konwencji Voigta , przyjmowanej niekiedy w mechanice kompozytów. Stałe materiałowe $F_1, F_2, F_6, F_{11}, F_{22}, F_{66}, F_{12}$ można uzależnić od parametrów $X_{c1}, X_{t1}, X_{c2}, X_{t2}, S^w_{12}$ rozpatrując kolejno rozciąganie i ściskanie w kierunkach $i=1,2$ oraz ścinanie.

Dla jednokierunkowego rozciągania i ściskania wzdłuż osi 1 otrzymamy:

$$\begin{aligned} F_1 X_{t1} + F_{11} X_{t1}^2 &= 1, \\ F_1 X_{c1} + F_{11} X_{c1}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Stąd:

$$F_1 = \frac{1}{X_{t1}} + \frac{1}{X_{c1}}, \quad F_{11} = \frac{-1}{X_{c1} X_{t1}}$$

Podobnie dla rozciągania i ściskania wzdłuż osi 2:

$$\begin{aligned} F_2 X_{t2} + F_{22} X_{t2}^2 &= 1 \\ F_2 X_{c2} + F_{22} X_{c2}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$F_2 = \frac{1}{X_{t2}} + \frac{1}{X_{c2}}, \quad F_{22} = \frac{-1}{X_{t2} X_{c2}}$$

Dla ścinania, po uwzględnieniu że wartość kryterium powinna być niezależna od znaku naprężenia ścinającego τ_{12} otrzymujemy:

$$F_{66} = \frac{1}{S_{12}^2}, \quad F_6 = 0$$

Dla otrzymania informacji o wartości współczynnika F_{12} , związanego z interakcją naprężeń σ_1 i σ_2 potrzebne są wyniki eksperymentu, w którym jednocześnie działają oba naprężenia. Przyjmując obciążenie w którym $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ otrzymujemy w stanie granicznym:

$$(F_1 + F_2) \sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12}) \sigma^2 = 1$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} - \frac{(F_1 + F_2)}{\sigma} - (F_{11} + F_{22}) \right]$$

Ze względu na trudności w uzyskaniu danych doświadczalnych z testów dwuosiowych i zapewnienie stabilności hipotezy polecane jest zwykle przyjęcie:

$$F_{12} = -\frac{\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}}{2}$$

Dla przypadku trójwymiarowego stanu naprężenia hipoteza ma postać:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_3\sigma_{33} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + \\ + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} = 1$$

Wartości stałych F_i , F_{ij} powinny być wyznaczone z odpowiednich prób ściskania, rozciągania i ścinania:

$$F_i = \frac{1}{X_{ti}} + \frac{1}{X_{ci}}, \quad F_{ii} = \frac{-1}{X_{ci}X_{ti}}, \quad F_{ij} = -\frac{\sqrt{F_{ii} \cdot F_{jj}}}{2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$F_{44} = \frac{1}{S_{23}^2}, \quad F_{55} = \frac{1}{S_{13}^2}, \quad F_{66} = \frac{1}{S_{12}^2}$$

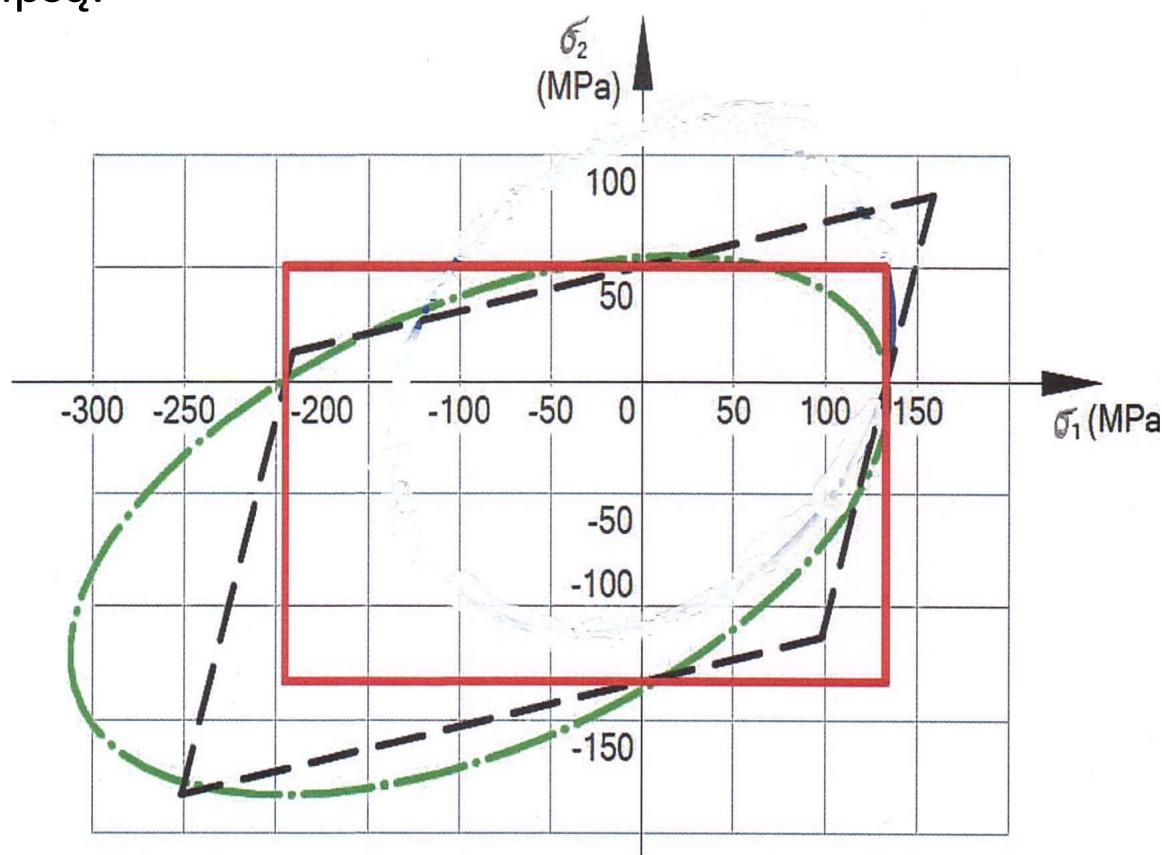
W przypadku jednokierunkowego rozciągania warstwy ortotropowej otrzymujemy związek między wartością naprężenia σ_{xx} i kątem rozciągania α odpowiadający zniszczeniu wg kryterium Tsai-Wu.

$$\sigma_{xx}(F_1\cos^2\alpha + F_2\sin^2\alpha) + \sigma_{xx}^2[F_{11}\cos^4\alpha + F_{22}\sin^4\alpha + (F_{66} + 2F_{12})\sin^2\alpha\cos^2\alpha] = 1$$

Właściwości kryterium Tsai-Wu:

- Wyniki można łatwo aproksymować za pomocą funkcji, co ułatwia graficzną interpretację wyników.
- Zależność wytrzymałości od kąta α jest gładka, podobnie jak ma to miejsce w wynikach eksperymentalnych.
- Wytrzymałość spada, gdy kąt α rośnie od 0° , inaczej niż w przypadku kryteriów maksymalnych naprężeń i odkształceń, w których wytrzymałość rośnie wraz ze wzrastającym kątem α .
- Współczynnik F_{12} jest wyznaczany eksperymentalnie za pomocą drogiego i skomplikowanego testu dwuosiowego.

Analizowane kryteria można także zilustrować w układzie naprężeń głównych σ_1 i σ_2 przedstawiając linię graniczną stanu naprężenia odpowiadającą wartości $k=1$. Obszar zamknięty linią graniczną wyznacza bezpieczne stany naprężenia. W układzie współrzędnych σ_1 , σ_2 linia graniczna odpowiadająca kryterium maksymalnych naprężeń tworzy prostokąt, linia odpowiadająca kryterium maksymalnych odkształceń – równoległobok, a linia odpowiadająca hipotezie Tsai-Wu jest elipsą.



Hipoteza Tsai–Hilla

W kryterium Tsai-Hilla, podobnie jak w kryterium Tsai-Wu przyjmujemy, że poszczególne składowe naprężenia wpływają razem na stan bezpieczeństwa materiału. Stąd wyężenie materiału jest opisywane wielomianową funkcją składowych stanu naprężenia zaproponowaną przez Hilla:

$$(G+H)\sigma_{11}^2 + (F+H)\sigma_{22}^2 + (F+G)\sigma_{33}^2 - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} - 2G\sigma_{11}\sigma_{33} - 2F\sigma_{22}\sigma_{33} + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1$$

Parametry równania F, G, H, L, M i N zostały wyznaczone względem dopuszczalnych naprężeń w materiale przez Tsai’a. Jeśli na ciało działa tylko naprężenie τ_{12} , to ponieważ jego maksymalną wartością może być S:

$$2N = \frac{1}{S^2}$$

Podobnie wyznaczamy parametry L i M dla naprężeń τ_{23} i τ_{13} . Podobnie, jeśli niezerowe jest tylko naprężenie σ_{11} :

$$G + H = \frac{1}{X_1^2}$$

A jeśli niezerowe jest naprężenie σ_{22} :

$$F + H = \frac{1}{X_2^2}$$

Jeśli mamy do czynienia z niezerowym naprężeniem σ_{33} , to jego maksymalna wartość może wynosić X_3 . Wtedy:

$$F + G = \frac{1}{X_3^2}$$

Na podstawie powyższych 3 równań można wyznaczyć zależności między parametrami F , G , H i maksymalnymi wartościami naprężeń w materiale X , Y , Z :

$$2F = \frac{1}{X_2^2} + \frac{1}{X_3^2} - \frac{1}{X_1^2}$$

$$2G = \frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{X_3^2} - \frac{1}{X_2^2}$$

$$2H = \frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{X_2^2} - \frac{1}{X_3^2}$$

Dla przypadku płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$) jednokierunkowej warstwy kompozytowej mamy:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X_1^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X_1^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{X_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

Ze względu na to, że z budowy takiej warstwy wynika, że $X_2 = X_3$ (dla kompozytu dwukierunkowego byłoby $X_1 = X_2$). Do powyższego kryterium muszą być wstawione odpowiednie wartości X_{t1} lub X_{c1} i X_{t2} lub X_{c2} w zależności od znaku naprężeń σ_{11} i σ_{22} . Stan, w którym lewa strona równania jest równa 1 odpowiada granicznej wartości, która odpowiada zniszczeniu materiału. Jeżeli wynikiem równania jest wartość mniejsza od 1 – materiał jest bezpieczny, jeżeli jest ona większa niż 1 – materiał ulegnie zniszczeniu.

Kryterium Tsai-Hilla można również stosować, jeśli kierunki obciążenia nie pokrywają się z głównymi osiami ortotropii. W przypadku rozciągania jednoosiowego dla takiego przypadku kryterium Tsai-Hilla przybiera postać:

$$\frac{\cos^4\alpha}{X_1^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X_1^2}\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \frac{\sin^4\alpha}{X_2^2} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2}$$

Kryterium Tsai-Hilla ma następujące zalety:

- Wyniki można łatwo aproksymować za pomocą funkcji, co ułatwia graficzną interpretację wyników.
- Zależność wytrzymałości od kąta α jest gładka, podobnie jak ma to miejsce w wynikach eksperymentalnych.
- Wytrzymałość spada, gdy kąt α rośnie od 0° , inaczej niż w przypadku kryteriów maksymalnych naprężeń i odkształceń, w których wytrzymałość rośnie wraz ze wzrastającym kątem α .

Ogólnie kryteria Tsai-Wu i Tsai-Hilla są wygodniejsze do stosowania niż kryteria maksymalnych naprężeń i odkształceń (1 równanie zamiast 3 w płaskim stanie naprężenia) i lepiej opisują fizyczne zachowanie się warstwy ortotropowej, przez to, że uwzględniają wpływ kombinacji składowych stanu naprężenia na wytrzymałość warstwy.

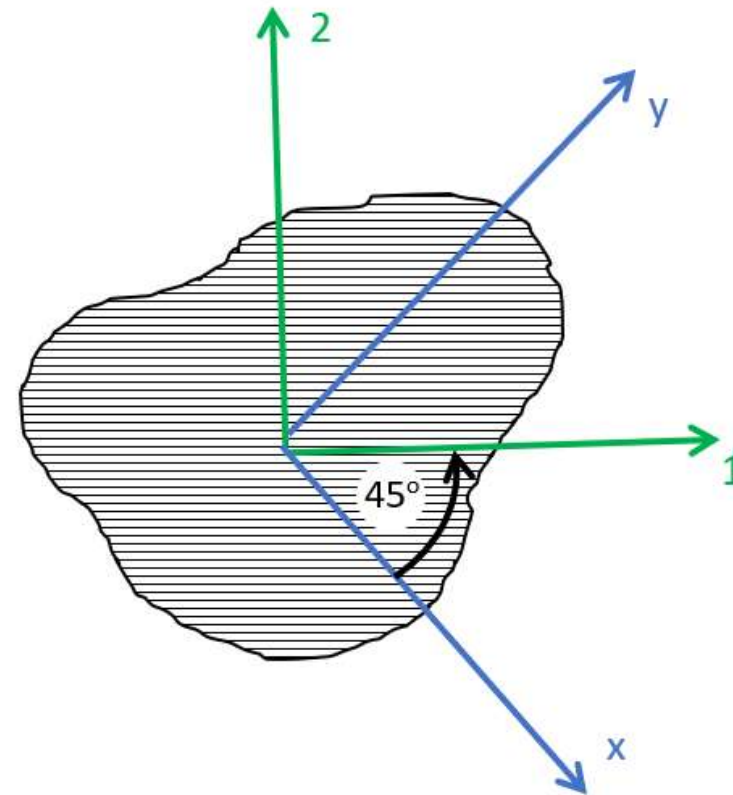
ZADANIE

Jednokierunkowy szklano-epoksydowy kompozyt rozciągany naprężeniem $\sigma_{xx} = 72 \text{ MPa}$ pod kątem $\alpha = 45^\circ$. Dane materiałowe:

$$E_{11} = 43 \text{ [GPa]}, E_{22} = 8 \text{ [GPa]}, \nu_{12} = 0,28, G_{12} = 4 \text{ [GPa]}, X_{T1} = 1100 \text{ [MPa]}, X_{C1} = 900 \text{ [MPa]}, X_{T2} = 35 \text{ [MPa]}, X_{C2} = 150 \text{ [MPa]}, S = 60 \text{ [MPa]}$$

Wyznaczyć parametr k dla:

- a) Hipotezy maksymalnych naprężeń,
- b) Hipotezy maksymalnych odkształceń,
- c) Hipotezy Tsai-Wu
- d) Hipotezy Tsai-Hilla



Rozwiązanie

a) Hipoteza maksymalnych naprężeń

$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha = 36 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha = 36 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{12} = -\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha = -36 \text{ [MPa]}$$

$$\frac{\sigma_{11}}{X_{T1}} = \frac{36}{1100} = 0,03$$

$$\frac{\sigma_{22}}{X_{T2}} = \frac{36}{35} = 1,03$$

$$\frac{|\tau_{12}|}{S} = \frac{36}{60} = 0,6$$

$$k = \max \left\{ \frac{\sigma_{11}}{X_{T1}}, \frac{\sigma_{22}}{X_{T2}}, \frac{|\tau_{12}|}{S} \right\} = 1,03$$

b) Hipoteza maksymalnych odkształceń

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12} = 0,05$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{xx}(\cos^2 \alpha - \nu_{12} \sin^2 \alpha) = 25,92 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{xx}(\sin^2 \alpha - \nu_{21} \cos^2 \alpha) = 34,2 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{12} = -\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha = -36 \text{ [MPa]}$$

$$\frac{\sigma_{11}}{X_{T1}} = \frac{25,92}{1100} = 0,02$$

$$\frac{\sigma_{22}}{X_{T2}} = \frac{34,2}{35} = 0,98$$

$$\frac{|\tau_{12}|}{S} = \frac{36}{60} = 0,6$$

$$k = \max \left\{ \frac{\sigma_{11}}{X_{T1}}, \frac{\sigma_{22}}{X_{T2}}, \frac{|\tau_{12}|}{S} \right\} = 0,98$$

c) Hipoteza Tsai-Wu

$$F_1 = \frac{1}{X_{T1}} + \frac{1}{X_{C1}} = \frac{1}{1100} + \frac{1}{900} = 0,00202 \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$F_2 = \frac{1}{X_{T2}} + \frac{1}{X_{C2}} = \frac{1}{35} + \frac{1}{150} = 0,035238 \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_{T1}X_{C1}} = -\frac{1}{1100 \cdot 900} = -0,000001 \left[\frac{1}{MPa^2} \right]$$

$$F_{22} = -\frac{1}{X_{T2}X_{C2}} = -\frac{1}{35 \cdot 150} = -0,000001 \left[\frac{1}{MPa^2} \right]$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2} = \frac{1}{3600} = 0,0002778 \left[\frac{1}{MPa^2} \right]$$

$$F_{12} = -\frac{\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}}{2} = -\frac{\sqrt{(-0,000001) \cdot (-0,00019)}}{2} = -0,000006935 [MPa]$$

$$k = \sigma_{xx}(F_1 \cos^2 \alpha + F_2 \sin^2 \alpha) + \sigma_{xx}^2 [F_{11} \cos^4 \alpha + F_{22} \sin^4 \alpha + (F_{66} + 2F_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] = 1,44$$

d) Hipoteza Tsai-Hilla

$$k = \left(\frac{\cos^4 \alpha}{X_{T1}^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X_{T1}^2} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{X_{T2}^2} \right) \sigma_{xx}^2 = 1,43$$

Stan naprężenia jest bezpieczny tylko wg hipotezy maksymalnych odkształceń ($k = 0,98$). Wg hipotezy maksymalnych naprężeń ($k = 1,03$), hipotezy Tsai-Wu ($k = 1,44$) i hipotezy Tsai-Hilla ($k = 1,43$) materiał ulegnie zniszczeniu.